

2013 年考研数三真题及答案解析

一、选择题 1—8 小题. 每小题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小, 则下列式子中错误的是 ()

(A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$ (B) $o(x)o(x^2) = o(x^3)$

(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$ (D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

2. 函数 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3. 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 的第 k 象限的部分, 记 $I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy$,

则 ()

(A) $I_1 > 0$ (B) $I_2 > 0$ (C) $I_3 > 0$ (D) $I_4 > 0$

4. 设 $\{a_n\}$ 为正项数列, 则下列选择项正确的是 ()

(A) 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛;

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$;

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $P > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^P a_n$ 存在;

(D) 若存在常数 $P > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^P a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

5. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.

(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

6. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件是

- (A) $a=0, b=2$ (B) $a=0, b$ 为任意常数
 (C) $a=2, b=0$ (D) $a=2, b$ 为任意常数

7. 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,2^2), X_3 \sim N(5,3^2)$,

$P_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\}$, 则

- (A) $P_1 > P_2 > P_3$ (B) $P_2 > P_1 > P_3$
 (C) $P_3 > P_2 > P_1$ (D) $P_1 > P_3 > P_2$

8. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3P
P	1/2	1/4	1/8	1/8

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

则 $P\{X+Y=2\} = (\quad)$

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{2}$

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

9. 设曲线 $y = f(x)$ 和 $y = x^2 - x$ 在点 $(1,0)$ 处有切线, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $(z+y)^x = xy$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 微分方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶非零矩阵, $|A|$ 为其行列式, A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式, 且满足 $A_{ij} + a_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设随机变量 X 服从标准正分布 $X \sim N(0,1)$, 则 $E(Xe^{2X}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

15. (本题满分 10 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cos 2x \cos 3x$ 与 ax^n 是等价无穷小, 求常数 a, n .

16. (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = \sqrt[3]{x}$, 直线 $x = a$ ($a > 0$) 及 x 轴所转成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴和 y 轴旋转一周所形成的立体的体积, 若 $10V_x = V_y$, 求 a 的值.

17. (本题满分 10 分)

设平面区域 D 是由曲线 $x = 3y, y = 3x, x + y = 8$ 所围成, 求 $\iint_D x^2 dx dy$.

18. (本题满分 10 分)

设生产某产品的固定成本为 6000 元, 可变成本为 20 元/件, 价格函数为 $P = 60 - \frac{Q}{1000}$,

(P 是单价, 单位: 元, Q 是销量, 单位: 件), 已知产销平衡, 求:

- (1) 该的边际利润.
- (2) 当 $P=50$ 时的边际利润, 并解释其经济意义.
- (3) 使得利润最大的定价 P .

19. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, 证明

- (1) 存在 $a > 0$, 使得 $f(a) = 1$;
- (2) 对 (1) 中的 a , 存在 $\xi \in (0, a)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$.

20. (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 问当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C , 使得 $AC - CA = B$, 并求出所有矩阵 C .

21. (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$. 记

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

- (1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;
- (2) 若 α, β 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

22. (本题满分 11 分)

设 (X, Y) 是二维随机变量, X 的边缘概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 在给定

$X = x(0 < x < 1)$ 的条件下, Y 的条件概率密度为 $f_{Y/X}(y/x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(1) 求 (X, Y) 的联合概率密度 $f(x, y)$;

(2) Y 的的边缘概率密度 $f_Y(y)$.

23. (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 θ 为未知参数且大于零,

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的极大似然估计量.