

2016 年考研数学 (三) 试题

一、 填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设函数 $f(u, v)$ 由关系式 $f[xg(y), y] = x + g(y)$ 确定, 其中函数 $g(y)$ 可微, 且 $g(y) \neq 0$, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, 则 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{DX}\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则

$$E \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、 选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

- (A) $(-1, 0)$. (B) $(0, 1)$. (C) $(1, 2)$. (D) $(2, 3)$. []

(8) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $g(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则

- (A) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点. (B) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.
 (C) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.
 (D) $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关. []

(9) 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则

- (A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
 (B) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
 (C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
 (D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, 0)$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

[]

(10) 设有下列命题:

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$ 收敛.

(3) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛.

则以上命题中正确的是

(A) (1) (2). (B) (2) (3). (C) (3) (4). (D) (1) (4). []

(11) 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$, 则下列结论中错误的是

(A) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) > f(a)$.

(B) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) > f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'(x_0) = 0$.

(D) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = 0$. [D]

(12) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必有

(A) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = a$. (B) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = -a$.

(C) 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B| = 0$. (D) 当 $|A| = 0$ 时, $|B| = 0$. []

(13) 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* \neq 0$, 若 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的

互不相等的解, 则对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系

(A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量. []

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$, 对给定的 $\alpha \in (0,1)$, 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$,

若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于

(A) $\frac{u_\alpha}{2}$. (B) $\frac{u_{1-\alpha}}{2}$. (C) $\frac{u_{1-\alpha}}{2}$. (D) $u_{1-\alpha}$. []

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

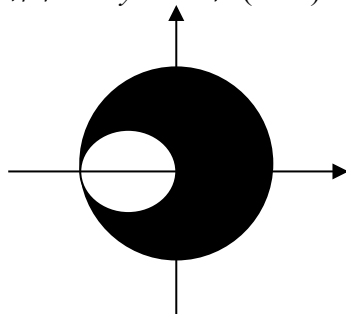
(15) (本题满分 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$.

(16) (本题满分 8 分)

求 $\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 所围成的

平面区域(如图).



(17) (本题满分 8 分)

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且满足

$$\int_a^x f(t) dt \geq \int_a^x g(t) dt, \quad x \in [a, b], \quad \int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt.$$

证明: $\int_a^b xf(x) dx \leq \int_a^b xg(x) dx$.

(18) (本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$, 其中价格 $P \in (0, 20)$, Q 为需求量.

(I) 求需求量对价格的弹性 E_d ($E_d > 0$);

(II) 推导 $\frac{dR}{dP} = Q(1 - E_d)$ (其中 R 为收益), 并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时,

降低价格反而使收益增加.

(19) (本题满分 9 分)

设级数

$$\frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的和函数为 $S(x)$. 求:

(I) $S(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(II) $S(x)$ 的表达式.

(20) (本题满分 13 分)

设 $\alpha_1 = (1, 2, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, a + 2, -3a)^T$, $\alpha_3 = (-1, -b - 2, a + 2b)^T$, $\beta = (1, 3, -3)^T$,

试讨论当 a, b 为何值时,

(I) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;

(II) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示, 并求出表示式;

(III) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 并求出表示式.

(21) (本题满分 13 分)

设 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) 求 A 的特征值和特征向量;

(II) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(22) (本题满分 13 分)

设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生} \\ 0, & \bar{A} \text{ 发生} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生} \\ 0, & \bar{B} \text{ 发生} \end{cases}.$$

求

(I) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} ;

(III) $Z = X^2 + Y^2$ 的概率分布.

(23) (本题满分 13 分)

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta, & x > \alpha \\ 0, & x \leq \alpha \end{cases}$$

其中参数 $\alpha > 0, \beta > 1$. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本,

(I) 当 $\alpha = 1$ 时, 求未知参数 β 的矩估计量;

(II) 当 $\alpha = 1$ 时, 求未知参数 β 的最大似然估计量;

(III) 当 $\beta = 2$ 时, 求未知参数 α 的最大似然估计量.