

2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个

选项是符合题目要求的

(1) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，则 ()

- (A) $ab = \frac{1}{2}$ (B) $ab = -\frac{1}{2}$ (C) $ab = 0$ (D) $ab = 2$

(2) 二元函数 $z = xy(3 - x - y)$ 的极值点 ()

- (A) (0, 0) (B) (0, 3) (C) (3, 0) (D) (1, 1)

(3) 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x) > 0$ 则 ()

- (A) $f(1) > f(-1)$ (B) $f(1) < f(-1)$
(C) $|f(1)| > |f(-1)|$ (D) $|f(1)| < |f(-1)|$

(4) 若级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\sin \frac{1}{n} - k \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]$ 收敛，则 $k = ()$

- (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -2

(5) 设 α 为 n 维单位列向量， E 为 n 阶单位矩阵，则

- (A) $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆 (B) $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆
(C) $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆 (D) $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

(6) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，则

- (A) A 与 C 相似， B 与 C 相似
(B) A 与 C 相似， B 与 C 不相似
(C) A 与 C 不相似， B 与 C 相似
(D) A 与 C 不相似， B 与 C 不相似

(7) 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 A 与 C 相互独立, B 与 C 相互独立, 则 $A \cup B$ 与 C 相互独立的充要条件是

- (A) A 与 B 相互独立
- (B) A 与 B 互不相容
- (C) AB 与 C 相互独立
- (D) AB 与 C 互不相容

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

则下列结论中不正确的是:

- (A) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布
- (B) $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布
- (C) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布
- (D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分。

(9) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx =$

(10) 差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的通解 $y_t =$

(11) 设生产某产品的平均成本 $\bar{C}(Q) = 1 + e^{-Q}$, 其中 Q 为产量, 则边际成本为

(12) 设函数 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且

$df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy, f(0, 0) = 0$, 则 $f(x, y) =$

(13) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的三维列向量组, 则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$,

的秩为

(14) 设随机变量 x 的概率分布为 $P\{X = -2\} = \frac{1}{2}$, $P\{X = 1\} = a$, $P\{X = 3\} = b$, 若

$EX = 0$ 则 $DX =$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$

(16) 计算积分 $\iint_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2} dx dy$, 其中 D 是第一象限中曲线 $y = \sqrt{x}$ 与 x 轴边界的无

界区域

(17) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

(18) 已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根, 求 k 的范围

(19) 若 $a_0 = 1$, $a_n = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1}) (n = 1, 2, 3, \dots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的

和函数

(1) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径不小于 1

(2) 证明 $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0$ $x \in (-1,1)$, 并求 $S(x)$ 的表达式

(20) 设 2 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$

(I) 证 $r(A) = 2$

(II) $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求 $AX = \beta$ 的通解

(21) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$

在正交变换 $x = Qy$ 下的标准型为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ 求 a 的值及一个正交矩阵 Q

(22) 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 的概率分布为

$P\{X = 0\} = P\{X = 2\} = \frac{1}{2}$, Y 的概率密度为 $f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(I) 求 $P\{Y \leq EY\}$

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度

(23) (本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 x_1, x_2, \dots, x_n 相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $z_i = |x_i - \mu|, (i = 1, 2, \dots, n)$ ，利用 z_1, z_2, \dots, z_n 估计 σ

(I) 求 z_1 的概率密度

(II) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量

(III) 求 σ 的最大似然估计量