附件 3：

厦门大学“景润杯”数学竞赛大纲(数学专业组)

参赛对象为大学本科在校数学专业学生,竞赛内容为大学本科数学专业《数学分析》（一年级）和《高等代数》的基本内容，其中《数学分析》占 65%，《高等代数》占 35%，具体如下：

Ⅰ、数学分析部分

一、集合与函数

1. 实数集、有理数与无理数的稠密性，实数集的界与确界、确界存在性定理、闭区间套定理、聚点定理、有限覆盖定理.

2. 函数、映射、变换概念及其几何意义，隐函数概念，反函数与逆变换，反函数存在性定理，初等函数以及与之相关的性质.

二、极限与连续

1. 数列极限、收敛数列的基本性质（极限唯一性、有界性、保号性、不等式性质）.

2. 数列收敛的条件（Cauchy 准则、迫敛性、单调有界原理、数列收敛与其子列收敛的关系），极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$ 及其应用.

3.一元函数极限的定义、函数极限的基本性质（唯一性、局部有界性、保号性、不等式性质、迫敛性），归结原则和 Cauchy 收敛准则，两个重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ 及其应用，计算一元函数极限的各种方法，无穷小量与无穷大量、阶的比较，记号 O 与 o 的意义，多元函数重极限与累次极限概念、基本性质，二元函数的二重极限与累次极限的关系.

4. 函数连续与间断、一致连续性、连续函数的局部性质（局部有界性、保号性），有界闭集上连续函数的性质（有界性、最大值最小值定理、介值定理、一致连续性）.

三、一元函数微分学

1.导数及其几何意义、可导与连续的关系、导数的各种计算方法，微分及其几何意义、可微与可导的关系、一阶微分形式不变性.

2.微分学基本定理：Fermat 定理，Rolle 定理，Lagrange 定理，Cauchy 定理，Taylor 公式(Peano 余项与 Lagrange 余项).

3.一元微分学的应用：函数单调性的判别、极值、最大值和最小值、凸函数及其应用、曲线的凹凸性、拐点、渐近线、函数图象的讨论、洛必达（L'Hopital）法则.

4.极值问题（必要条件与充分条件）.

四、一元函数积分学

1. 原函数与不定积分、不定积分的基本计算方法（直接积分法、换元法、分部积分法）、有理函数积分：$\int R(\cos x, \sin x)dx$ 型，$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 型.

2. 定积分及其几何意义、可积条件（必要条件、充要条件：$\sum \omega_i \Delta \boldsymbol{x}_i < \varepsilon$）、可积函数类.

3. 定积分的性质（关于区间可加性、不等式性质、绝对可积性、定积分第一中值定理）、变上限积分函数、微积分基本定理、N-L 公式及定积分计算、定积分第二中值定理.

4.无限区间上的广义积分、Canchy 收敛准则、绝对收敛与条件收敛、$f(x)$ 非负时 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的收敛性判别法（比较原则、柯西判别法）、Abel 判别法、Dirichlet 判别法、无界函数广义积分概念及其收敛性判别法.

5. 微元法、几何应用（平面图形面积、已知截面面积函数的体积、曲线弧长与弧微分、旋转体体积），其他应用.

五、无穷级数

1. 数项级数

级数及其敛散性，级数的和，Cauchy 准则，收敛的必要条件，收敛级数基本性质；正项级数收敛的充分必要条件，比较原则、比式判别法、根式判别法以及它们的极限形式；交错级数的 Leibniz 判别法；一般项级数的绝对收敛、条件收敛性、Abel 判别法、Dirichlet 判别法.

2. 函数项级数

函数列与函数项级数的一致收敛性、Cauchy 准则、一致收敛性判别法（M-判别法、Abel 判别法、Dirichlet 判别法）、一致收敛函数列、函数项级数的性质及其应用.

3.幂级数

幂级数概念、Abel 定理、收敛半径与区间，幂级数的一致收敛性，幂级数的逐项可积性、可微性及其应用，幂级数各项系数与其和函数的关系、函数的幂级数展开、Taylor 级数、Maclaurin 级数.

Ⅱ、高等代数部分

一、多项式

1. 数域与一元多项式的概念
2. 多项式整除、带余除法、最大公因式、辗转相除法
3. 互素、不可约多项式、重因式与重根.
4. 多项式函数、余数定理、多项式的根及性质.
5. 代数基本定理、复系数与实系数多项式的因式分解.
6. 本原多项式、Gauss 引理、有理系数多项式的因式分解、Eisenstein 判别法、有理数域上多项式的有理根.
7. 多元多项式及对称多项式、韦达(Vieta)定理.

二、行列式

1. n 级行列式的定义与性质.

2. 行列式的计算.

3. 行列式按一行（列）展开.

4. 拉普拉斯(Laplace)展开定理.

5. 克拉默(Cramer)法则.

三、线性方程组

1. 高斯(Gauss)消元法、线性方程组的初等变换、线性方程组的一般解.

2. n 维向量的运算与向量组.

3. 向量的线性组合、线性相关与线性无关、两个向量组的等价.

4. 向量组的极大无关组、向量组的秩.

5. 矩阵的行秩、列秩、秩、矩阵的秩与其子式的关系.

6. 线性方程组有解判别定理、线性方程组解的结构.

7. 齐次线性方程组的基础解系、解空间及其维数

四、矩阵

1. 矩阵的概念、矩阵的运算(加法、数乘、乘法、转置等运算)及其运算律.

2. 矩阵乘积的行列式、矩阵乘积的秩与其因子的秩的关系.

3. 矩阵的逆、伴随矩阵、矩阵可逆的条件.

4. 分块矩阵及其运算与性质.

5. 初等矩阵、初等变换、矩阵的等价标准形.

6. 分块初等矩阵、分块初等变换.

五、双线性函数与二次型

1. 双线性函数、对偶空间

2. 二次型及其矩阵表示.

3. 二次型的标准形、化二次型为标准形的配方法、初等变换法、正交变换法.

4. 复数域和实数域上二次型的规范形的唯一性、惯性定理.

5. 正定、半正定、负定二次型及正定、半正定矩阵

六、线性空间

1. 线性空间的定义与简单性质.

2. 维数，基与坐标.

3. 基变换与坐标变换.

4. 线性子空间.

5. 子空间的交与和、维数公式、子空间的直和.

七、线性变换

1. 线性变换的定义、线性变换的运算、线性变换的矩阵.

2. 特征值与特征向量、可对角化的线性变换.

3. 相似矩阵、相似不变量、哈密尔顿-凯莱定理.

4. 线性变换的值域与核、不变子空间.

八、若当标准形

1. $\lambda-$矩阵.

2. 行列式因子、不变因子、初等因子、矩阵相似的条件.

3. 若当标准形.

九、欧氏空间

1. 内积和欧氏空间、向量的长度、夹角与正交、度量矩阵.

2. 标准正交基、正交矩阵、施密特(Schmidt)正交化方法.

3. 欧氏空间的同构.

4. 正交变换、子空间的正交补.

5. 对称变换、实对称矩阵的标准形.

6. 主轴定理、用正交变换化实二次型或实对称矩阵为标准形.

7. 酉空间.