

2012 考研数学三试题

1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数

()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(2) 设函数 $y(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $y'(0) =$

()

- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$ (C) $(-1)^{n-1}n!$ (D)

$(-1)^n n!$

(3) 如果函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是

)

(A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微

(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微

(C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在

(D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在

(4) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k = 1, 2, 3)$ 则有 ()

- (A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_3 < I_2 < I_1$ (C) $I_2 < I_3 < I_1$ (D) $I_2 < I_1 < I_3$

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ C_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ C_4 \end{pmatrix}$, 其中 C_1, C_2, C_3, C_4 为任意常数, 则下

列向量组线性相关的为 ()

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

(6) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ =$ ()

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则

$P\{X < Y\} =$ ()

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

(8) 将长度为 $1m$ 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为

()

- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -1

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e$, 则 $f(x) =$

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2} dx =$ _____

(11) $\text{grad}(xy + \frac{z}{y})|_{(2,1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

(12) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 ds = \underline{\hspace{2cm}}$

(13) 设 X 为三维单位向量, E 为三阶单位矩阵, 则矩阵 $E - XX^T$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$

(14) 设 A, B, C 是随机变量, A 与 C 互不相容, $p(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}, p(AB|\bar{C}) = \underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)

证明 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$

(16)

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值

(17)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数

(18)

已知曲线 $L: \begin{cases} x = f(t), \\ y = \cos t \end{cases} (0 \leq t < \frac{\pi}{2})$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且

$f(0) = 0, f'(t) > 0 (0 < t < \frac{\pi}{2})$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数

$f(t)$ 的表达式, 并求此曲线 L 与 x 轴与 y 轴无边界的区域的面积。

(19)

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2,0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点

$(0,2)$ 的曲线段, 计算曲线积分 $J = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$

(20) (本题满分 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) 计算行列式 $|A|$;

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 并求其通解。

(21)

$$\text{已知 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{二次型 } f(x_1, x_2, x_3) = x^T (A^T A)x \text{ 的秩为 } 2$$

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $x = Qy$ 将 f 化为标准型.

(22)

设二维离散型随机变量 X 、 Y 的概率分布为

| | | | |
|---|----------------|---------------|----------------|
| | 0 | 1 | 2 |
| 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{1}{12}$ |

(I) 求 $P\{X = 2Y\}$;

(II) 求 $\text{Cov}(X - Y, Y)$.

(23)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(u, \sigma^2)$ 与 $N(u, 2\sigma^2)$ ，其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$ 。设 $Z = X - Y$ 。

(1) 求 Z 的概率密度 $f(z, \sigma^2)$;

(2) 设 z_1, z_2, \dots, z_n 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$

(3) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量