# 2010年全国硕士研究生入学统一考试
# 数学（三）试题及参考答案

**一、选择题**（1~8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，把所选项前的字母填在答题纸指定的位置上）

（1）若$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^{x}\right]=1$，则$a=$（　　）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

（2）设函数$y_1$，$y_2$是一阶非齐次微分方程$y'+p(x)y=q(x)$的两个特解，若常数$\lambda$，$\mu$使得$\lambda y_1+\mu y_2$是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$是该方程对应的齐次方程的解，则（　　）

（A）$\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{1}{2}$　（B）$\lambda=-\frac{1}{2}$，$\mu=-\frac{1}{2}$　（C）$\lambda=\frac{2}{3}$，$\mu=\frac{1}{3}$　（D）$\lambda=\frac{2}{3}$，$\mu=\frac{2}{3}$

（3）设函数$f(x)$、$g(x)$具有二阶导数，且$g(x_0)=a$，$g(x_0)=a$是$g(x)$的极值，则$f[g(x)]$在$x_0$处取得极大值的一个充分条件是（　　）

（A）$f'(a)<0$　（B）$f'(a)>0$　（C）$f''(a)<0$　（D）$f''(a)>0$

（4）设$f(x)=\ln^{10}x$，$g(x)=x$，$h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$，则当$x$充分大时有（　　）

（A）$g(x)<h(x)<f(x)$　（B）$h(x)<g(x)<f(x)$

（C）$f(x)<g(x)<h(x)$　（D）$g(x)<f(x)<h(x)$

（5）设向量组$I:\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$可由向量组$II:\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$线性表示，下列命题正确的是（　　）

（A）若向量组$I$线性无关，则$r\le s$　（B）若向量组$I$线性相关，则$r>s$

（C）若向量组$II$线性无关，则$r\le s$　（D）若向量组$II$线性相关，则$r>s$

（6）设$A$是4实对称矩阵，且$A^2+A=0$，若$R(A)=3$，则$A$相似于（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　（D）

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

（7）设随机变量$X$的分布函数为$F(x)=\begin{cases} 0\ ,\ x<0 \\ \dfrac{1}{2}\ ,\ 0\le x<\dfrac{1}{2} \\ 1-\mathrm{e}^{-x}\ ,\ x\ge\dfrac{1}{2} \end{cases}$，则$P\{X=1\}=$（ ）

（A）0 （B）$\dfrac{1}{2}$ （C）$\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$ （D）$1-\mathrm{e}^{-1}$

（8）设$f_1(x)$为标准正态分布的概率密度函数，$f_2(x)$为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度函数，若$f(x)=\begin{cases} af_1(x)\ ,\ x\le 0 \\ bf_2(x)\ ,\ x>0 \end{cases}$（$a>0$，$b>0$），则$a$，$b$满足（ ）

（A）$2a+3b=4$ （B）$3a+2b=4$ （C）$a+b=1$ （D）$a+b=2$

## 二、填空题（9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上）

（9）设可导函数$y=y(x)$由方程$\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\mathrm{d}t$所确定，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$( )

（10）设位于曲线$y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$（$\mathrm{e}\le x<+\infty$）下方，$x$轴上方的无界区域为$G$，则$G$绕$x$轴旋转一周所得空间区域的体积为( )

（11）设某商品的收益函数为$R(p)$，收益弹性为$1+p^3$，其中$p$为价格，$R(1)=1$，则$R(p)=$

( )

（12）若曲线$y=x^3+ax^2+bx+1$有拐点$(-1,0)$，则$b=$__________

（13）设$A$，$B$为3阶矩阵，且$|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$则$|A+B^{-1}|=$________

（14）设$X_1,X_2,\ldots,X_n$为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$（$\sigma>0$）的简单随机样本，统计差$T=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}$，则$ET=$( )

**三、解答题**（15～23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定的位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$。

（16）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成。

（17）（本题满分 11 分）

求函数 $M=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值。

（18）（本题满分 10 分）

（I）比较 $\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt$ （$n=1,2,3,...$）；

（II）记 $u_n=\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n \mathrm{d}t$ （$n=1,2,3,...$），求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$。

（19）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 内连续，在 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$。

（I）证明：存在 $\eta\in(0,2)$，使得 $f(\eta)=f(0)$；

（II）证明：存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$。

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解。

（I）求 $\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{a}$；　　（II）求 $Ax=b$ 的通解。

（21）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交矩阵 $Q$ 使得 $Q^TAQ$ 为对角矩阵，若 $Q$ 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 $a$，$Q$。

（22）（本题满分 11 分）

设二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}，\ -\infty<x<+\infty，\ -\infty<y<+\infty。$$

求 $A$ 及 $f_{Y|X}(y|x)$。

（23）（本题满分 11 分）

箱内有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别为 1、2、3 个，现从箱中随机取出 2 个球，设 $X$ 为取出的红球个数，$Y$ 为取出的白球个数。

（I）求随机变量 $(X,Y)$ 的概率分布；　　（II）求 $Cov(X,Y)$。